

# Modelado de un Péndulo Invertido Esférico sobre un Mecanismo de Cinco Barras

Israel Soto y Ricardo Campa  
Instituto Tecnológico de la Laguna  
Torreón, Coah, México  
israel\_kb@ieee.org

**Resumen**—Este documento describe el modelado de un sistema mecánico compuesto por un péndulo invertido esférico cuya base se encuentra montada sobre un mecanismo de cinco barras. El sistema completo es de cuatro grados de libertad, aunque solo dos de ellos son actuados.

**Palabras clave:** modelo dinámico, péndulo invertido esférico, mecanismo de cinco barras.

## I. INTRODUCCIÓN

El problema de controlar el balanceo de un péndulo invertido siempre ha llamado la atención de los investigadores. Existe una variedad de sistemas tipo péndulo invertido, siendo los más conocidos el pendubot, el acrobot, el carro péndulo, el péndulo con rueda inercial y el péndulo de Furuta (ver (Alvarado, 2010)). Todos estos sistemas tienen en común ser sistemas de dos grados de libertad (g.d.l.) con un grado de subactuación de uno, es decir, que una de sus dos articulaciones es subactuada.

Otro miembro de la familia de los péndulos invertidos es el péndulo esférico (o péndulo de 2 g.d.l.) que consiste de una varilla rígida acoplada en su base a una articulación universal subactuada, de manera que el extremo de la varilla se mueve sobre la superficie de una esfera con centro en la base. Y mediante el movimiento de la base del péndulo en el plano horizontal es posible balancear el extremo de la varilla sobre la vertical.

El péndulo invertido esférico (PIE) ha sido estudiado por un gran número de investigadores (Yang *et al.*, 2000), (Albouy y Praly, 2000), (Bloch *et al.*, 2000) y (Liu *et al.*, 2005). El interés por el modelado y control de un PIE radica en que el modelo matemático de este sistema se considera como un modelo simple de cohetes o edificios, y puede ser utilizado para el control de posición del cohete, para el control de las oscilaciones de los edificios o simplemente para el estudio de nuevas técnicas de control.

De acuerdo con (Ishii *et al.*, 2009) existe una clasificación de sistemas tipo péndulo invertido esférico según al mecanismo que se usa para estabilizar al PIE, que puede ser:

1. una mesa XY
2. un vehículo omnidireccional
3. un brazo robótico

En este trabajo, al igual que en (Ishii *et al.*, 2009), se considera que el movimiento de la base del PIE es

controlado a través de un mecanismo de cinco barras (M5B), que es un ejemplo bien conocido de un mecanismo de cadena cerrada. Tal sistema (M5B + PIE) se ha vuelto común debido a que existe un prototipo comercial para fines didácticos (Quanser, 2010). La complejidad del modelado y control de este sistema (PIE + M5B) se debe en buena parte a las restricciones debidas al lazo cerrado del M5B.

Las ecuaciones que rigen el movimiento de cualquier sistema mecánico deben de tomar en cuenta las restricciones cinemáticas entre los elementos que lo forman. Para mecanismos de cadena abierta (MCA) esto es una tarea directa y hay procedimientos simples para hacerlo, produciendo un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Por otro lado, para mecanismos de cadena cerrada (MCCs) la existencia de lazos origina ecuaciones de restricción algebraicas simultáneas, las cuales no pueden resolverse explícitamente. Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para un MCC son ecuaciones algebro-diferenciales (EADs) (Dabney y Ghorbel, 2002).

En este documento se utiliza uno de los métodos que se describen en (Soto y Campa, 2011), los cuales consisten en proyectar la dinámica del sistema al espacio tangente de la variedad de las restricciones, para transformar las EADs que resultan del análisis dinámico de MCCs en un conjunto de EDOs con un menor número de estados, de manera que se puedan resolver.

La finalidad de este artículo es presentar el modelo cinemático y dinámico del sistema PIE + M5B completo. Es importante resaltar que en (Ishii *et al.*, 2009) se reducen las no linealidades del sistema, mientras que en este documento se reduce el orden del sistema al ser representado sólo por EDOs, por lo que es un resultado original. También hay que mencionar en (Alvarado, 2010) se estudia este mismo sistema pero no se analizó completo, sino el PIE y el M5B por separado.

El resto del documento se organiza como sigue. En la sección II se repasa lo referente al modelado de sistemas con restricciones. El modelado cinemático y dinámico del sistema M5B + PIE se presenta en la sección III. Finalmente, en la sección IV se dan las conclusiones al trabajo.

## II. MODELADO PARA SISTEMAS RESTRINGIDOS

### II-A. Modelo cinemático

Considérese un MCC con  $m$  articulaciones, pero con sólo  $n$  ( $n < m$ ) g.d.l. entonces deben existir  $p = m - n$  restricciones holonómicas que permitan reducir el orden del sistema de  $m$  a  $n$ ; en otras palabras, si se seleccionan  $n$  variables articulares independientes deben existir  $p$  variables articulares dependientes.

Sea  $\rho = [q^T \beta^T]^T \in \mathbb{R}^m$  con  $m = n + p$  el vector de variables articulares generalizadas ( $q \in \mathbb{R}^n$  es el vector de variables independientes y  $\beta \in \mathbb{R}^p$  es el vector de variables articulares restringidas). Las restricciones holonómicas quedan entonces como un vector de la forma

$$\gamma(\rho) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^p$$

y como resultado de esto debe ser posible expresar

$$\beta = \beta(q).$$

El problema de *cinemática directa* consiste en encontrar expresiones para las variables de postura en términos de las variables articulares activas y puede expresarse como

$$x = f(q, \beta(q)).$$

La cinemática inversa consiste en establecer el valor de las coordenadas articulares activas correspondientes a la postura del órgano terminal y se puede expresar como

$$q = f^{-1}(x).$$

La cinemática inversa para MCCs puede resolverse de forma general por métodos geométricos o analíticos como el utilizado en este documento (Merlet, 2006).

### II-B. Modelo dinámico

El modelo dinámico de un mecanismo de  $n$  grados de libertad, con  $m$  variables generalizadas ( $m > n$ ), y sujeto a  $p = m - n$  restricciones holonómicas se puede representar mediante la siguiente ecuación algebro diferencial (EAD)

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \dot{\rho})}{\partial \dot{\rho}} \right\} - \frac{\partial \mathcal{L}(\rho, \dot{\rho})}{\partial \rho} = \tau_\rho + \left( \frac{\partial \gamma(\rho)}{\partial \rho} \right)^T \lambda \quad (1)$$

$$\gamma(\rho) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

donde el Lagrangiano  $\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho})$  se define como

$$\mathcal{L}(\rho, \dot{\rho}) = K(\rho, \dot{\rho}) - U(\rho) \quad (3)$$

siendo  $K(\rho, \dot{\rho})$  la energía cinética y  $U(\rho)$  la energía potencial del mecanismo; el vector  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  constituye al vector de multiplicadores de Lagrange, que asegura que las restricciones 2 se cumplan. Además, la ecuación (1) se puede reescribir como

$$M(\rho)\ddot{\rho} + C(\rho, \dot{\rho})\dot{\rho} + g(\rho) = \tau_\rho + D^T(\rho)\lambda \quad (4)$$

donde  $M(\rho) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  representa la matriz de inercias,  $C(\rho, \dot{\rho}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es la matriz de términos generados por las fuerzas centrífugas y de Coriolis,  $g(\rho) \in \mathbb{R}^m$  representa

al vector de fuerzas debidas a la gravedad,  $\tau \in \mathbb{R}^m$  es el vector de fuerzas aplicadas al sistema, y  $D(\rho) = \frac{\partial \gamma(\rho)}{\partial \rho} \in \mathbb{R}^{p \times m}$  es llamado aquí el jacobiano de restricción. Además como se explica en (Sciavicco y Siciliano, 2000) las siguientes propiedades se satisfacen:

$$K(\rho, \dot{\rho}) = \frac{1}{2} \dot{\rho}^T M(\rho) \dot{\rho} \quad (5)$$

$$g(\rho) = \frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} \quad (6)$$

Para resolver el sistema (4) se puede recurrir a cualquiera de los métodos mencionados en (Soto y Campa, 2011), se obtiene una matriz  $R(\rho) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tal que  $\dot{\rho} = R(\rho)\dot{q}$  y cuyo espacio columna se encuentra en el espacio nulo de  $D(\rho)$ , es decir  $D(\rho)R(\rho) = \mathbf{0}$ . Utilizando la matriz  $R(\rho)$  es posible reducir el sistema (4) en un nuevo sistema

$$\begin{aligned} \bar{M}(\rho)\ddot{q} + \bar{C}(\rho, \dot{q})\dot{q} + \bar{g}(\rho) &= \bar{\tau}, \\ \gamma(\rho) &= \mathbf{0}, \\ \alpha(\rho) - q &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (7)$$

donde

$$\bar{M}(\rho) = R(\rho)^T M(\rho) R(\rho)$$

$$\bar{C}(\rho, \dot{\rho}) = R(\rho)^T C(\rho, \dot{\rho}) R(\rho) + R(\rho)^T M(\rho) \dot{R}(\rho, \dot{\rho})$$

$$\bar{g}(\rho) = R(\rho)^T g(\rho)$$

$$\bar{\tau} = R(\rho)^T \tau_\rho$$

y nótese que los estados que definen la dinámica del sistema son  $q$ ,  $\dot{q}$  y  $\rho$ , los cuales pueden ser obtenidos integrando las ecuaciones de estado correspondientes.

## III. MODELADO DEL MECANISMO BAJO ESTUDIO

En esta sección se obtiene el modelado cinemático y dinámico del sistema PIE+M5B el cual se muestra en la

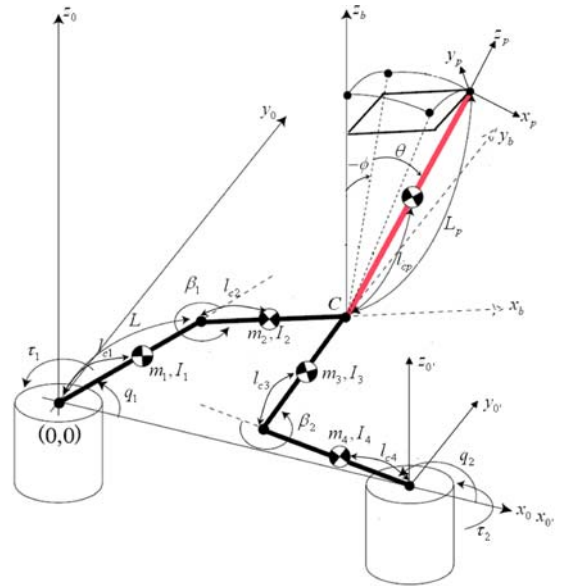


Figura 1. Configuración del mecanismo bajo estudio

figura 1. En esta figura se muestran también los marcos de cada extremo del M5B ( $\Sigma_0$  y  $\Sigma_{0'}$ ), así como de la base ( $\Sigma_b$ ) y del extremo ( $\Sigma_p$ ) del péndulo. Y, en general  $\Sigma_i$  se considera formado por los ejes  $x_i, y_i, z_i$ .

Los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  indican la orientación del extremo del péndulo con respecto al marco  $\Sigma_b$ ,  $\theta$  es el ángulo que rota con respecto al eje  $y_b$  y  $\phi$  es el ángulo que rota con respecto al eje  $x_b$ .

Los ángulos  $q_1$  y  $q_2$  de las articulaciones activas del M5B determinan su configuración. Los ángulos  $\beta$  de las articulaciones pasivas dependen de  $q_1$  y  $q_2$ . Para fines de análisis, en este artículo se define el vector de variables articulares independientes como  $\mathbf{q} = [q_1 \ q_2 \ \phi \ \theta]^T$  y el vector de variable operacionales como  $\mathbf{x} = [x_b \ y_b \ \phi \ \theta]^T$ . Las longitudes de los cuatro eslabones móviles se consideran iguales a  $L$ . La longitud del péndulo es  $L_p$ .

### III-A. Modelo cinemático

**III-A.1. Modelo cinemático directo:** Para obtener el modelo cinemático directo se tomó como referencia (Alvarado, 2010). La solución de la cinemática directa se reduce a encontrar las coordenadas de los puntos de intersección de los círculos de radio  $L$  con centros en  $C_1$  y  $C_2$  como se muestra en la figura 2 a) cuyas ecuaciones son

$$\begin{aligned} (x_b - LC(q_1))^2 + (y_b - LS(q_1))^2 &= L^2, \\ (x_b - (2L + LC(q_2)))^2 + (y_b - LS(q_2))^2 &= L^2, \end{aligned}$$

donde las notaciones  $S(\cdot)$  y  $C(\cdot)$  se usan para  $\sin(\cdot)$  y  $\cos(\cdot)$ , respectivamente. Usando Matlab es posible encontrar las siguientes dos soluciones para  $x_b$  y  $y_b$

$$\begin{aligned} x_b &= \frac{L}{2} [2 + C(q_1) + C(q_2)] \\ &\pm \frac{L}{2} [S(q_1) - S(q_2)] \sqrt{-\frac{C(q_1 - q_2) + 2C(q_1) - 2C(q_2) - 1}{C(q_1 - q_2) + 2C(q_1) - 2C(q_2) - 3}} \\ y_b &= \frac{L}{2} [S(q_1) + S(q_2)] \\ &\pm \frac{L}{2} [C(q_2) - C(q_1) + 2] \sqrt{-\frac{C(q_1 - q_2) + 2C(q_1) - 2C(q_2) - 1}{C(q_1 - q_2) + 2C(q_1) - 2C(q_2) - 3}}. \end{aligned}$$

Además, de la figura 2 b) es posible obtener las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \beta_1(\mathbf{q}) &= \tan^{-1} \left( \frac{y_b - LS(q_1)}{x_b - LC(q_1)} \right) \\ \beta_2(\mathbf{q}) &= \tan^{-1} \left( \frac{y_b - LS(q_2)}{x_b - (2L + LC(q_2))} \right) \end{aligned}$$

**III-A.2. Modelo cinemático inverso:** A partir de la figura 2 a), se pueden definir las siguientes expresiones

$$x_b = LC(q_1) + LC(q_1 + \beta_1) \quad (8)$$

$$y_b = LS(q_1) + LS(q_1 + \beta_1) \quad (9)$$

$$x_b = 2L + LC(q_2) + LC(q_2 + \beta_2) \quad (10)$$

$$y_b = LS(q_2) + LS(q_2 + \beta_2) \quad (11)$$

por otra parte, de la figura 2 b) se observa que

$$x_b = rC(\alpha) \quad \text{y} \quad y_b = rS(\alpha) \quad (12)$$

donde

$$r = \sqrt{x_b^2 + y_b^2} \quad \text{y} \quad \alpha = \tan^{-1} \left( \frac{y_b}{x_b} \right) \quad (13)$$

y además

$$2q_1 + \beta_1 = 2\alpha \quad (14)$$

realizando algunas operaciones algebraicas con las ecuaciones (8), (9) y (12)-(14) se tiene que

$$\begin{aligned} q_1 &= \tan^{-1} \left( \frac{y_b}{x_b} \right) \mp \cos^{-1} \left( \frac{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{2L} \right) \\ \beta_1 &= \pm 2 \cos^{-1} \left( \frac{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{2L} \right). \end{aligned}$$

Siguiendo un procedimiento similar pero partiendo de la ecuaciones (10) y (11) se llega a

$$\begin{aligned} q_2 &= \tan^{-1} \left( \frac{y_b}{x_b - 2L} \right) \mp \cos^{-1} \left( \frac{\sqrt{(x_b - 2L)^2 + y_b^2}}{2L} \right) \\ \beta_1 &= \mp 2 \cos^{-1} \left( \frac{\sqrt{(x_b - 2L)^2 + y_b^2}}{2L} \right) \end{aligned}$$

**III-A.3. Modelado cinemático diferencial:** Derivando con respecto al tiempo (8)-(11) para  $i = 1, 2$  se tiene

$$\dot{x}_b = -LS(q_i)\dot{q}_i - LS(q_i + \beta_i)(\dot{q}_i + \dot{\beta}_i) \quad (15)$$

$$\dot{y}_b = LC(q_i)\dot{q}_i + LC(q_i + \beta_i)(\dot{q}_i + \dot{\beta}_i) \quad (16)$$

multiplicando las ecuaciones (15) y (16) por  $\cos(q_i + \beta_i)$  y  $\sin(q_i + \beta_i)$  respectivamente y sumando los resultados se obtiene

$$\dot{x}_b C(q_i + \beta_i) + \dot{y}_b S(q_i + \beta_i) = LS(\beta_i)\dot{q}_i \quad (17)$$

sustituyendo para  $i = 1, 2$  se encuentra la ecuación matricial que relaciona las velocidades operacionales  $\dot{x}_b$  y  $\dot{y}_b$  con las velocidades de las articulaciones actuadas  $\dot{q}_1$  y  $\dot{q}_2$ .

$$\begin{bmatrix} C(q_1 + \beta_1) & S(q_1 + \beta_1) \\ C(q_2 + \beta_2) & S(q_2 + \beta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} S(\beta_1) & 0 \\ 0 & S(\beta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

de esta manera es posible definir la cinemática diferencial del sistema como

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$$

donde

$$\mathbf{J} = L \begin{bmatrix} \frac{S(q_2 + \beta_2)S(\beta_1)}{S(q_2 + \beta_2 - q_1 - \beta_1)} & 0 & 0 & \frac{-S(q_1 + \beta_1)S(\beta_2)}{S(q_2 + \beta_2 - q_1 - \beta_1)} \\ -\frac{C(q_2 + \beta_2)S(\beta_1)}{S(q_2 + \beta_2 - q_1 - \beta_1)} & 0 & 0 & \frac{C(q_1 + \beta_1)S(\beta_2)}{S(q_2 + \beta_2 - q_1 - \beta_1)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Además, de (15) y (16), se llega a

$$\begin{aligned} -S(q_1)\dot{q}_1 - S(q_1 + \beta_1)(\dot{q}_1 + \dot{\beta}_1) &= -S(q_2)\dot{q}_2 - S(q_2 + \beta_2)(\dot{q}_2 + \dot{\beta}_2) \\ C(q_1)\dot{q}_1 + C(q_1 + \beta_1)(\dot{q}_1 + \dot{\beta}_1) &= C(q_2)\dot{q}_2 + C(q_2 + \beta_2)(\dot{q}_2 + \dot{\beta}_2) \end{aligned}$$

expresando las ecuaciones anteriores en forma matricial y despejando  $\dot{\mathbf{q}}$  se llega a

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{J}_\beta(\mathbf{q}, \beta(\mathbf{q})) \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

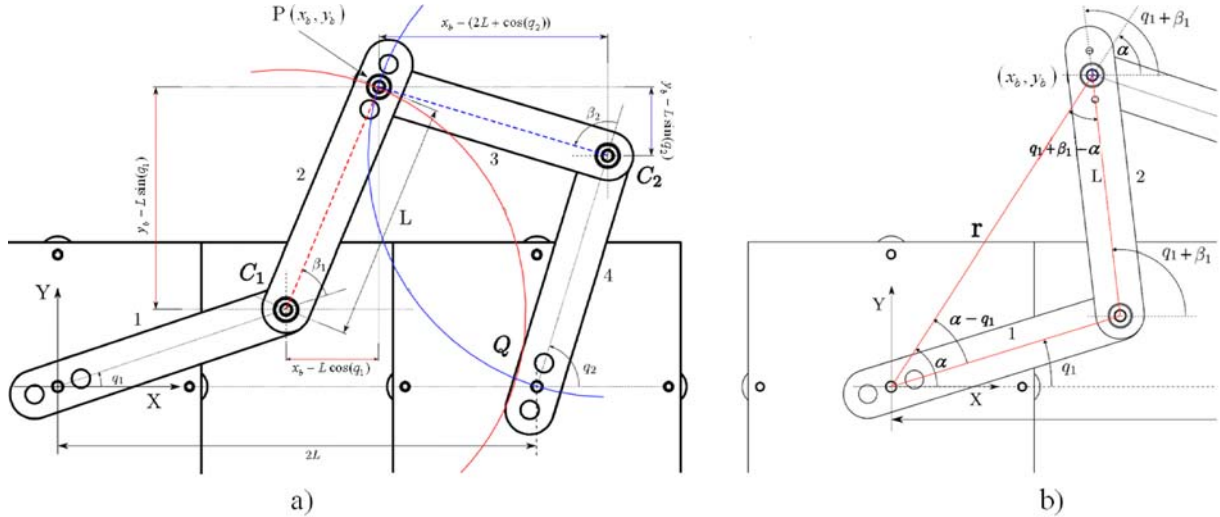


Figura 2. Relaciones geométricas del mecanismo de cinco barras

donde

$$J_{\beta}(\mathbf{q}, \beta(\mathbf{q})) = \begin{bmatrix} -\frac{S(q_1 - q_2 - \beta_2)}{S(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)} - 1 & -\frac{S(\beta_2)}{S(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)} \\ \frac{S(\beta_1)}{S(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)} & -\frac{S(q_1 - q_2 + \beta_1)}{S(q_1 - q_2 + \beta_1 - \beta_2)} - 1 \end{bmatrix}$$

establece la relación entre las velocidades de las articulaciones actuadas y pasivas del M5B.

### III-B. Modelado dinámico

Siguiendo el procedimiento propuesto en (Ghorbel *et al.*, 2000) se considera que el sistema de la figura 1 se corta en el punto C quedando separados dos MCAs uno de 4 g.d.l formado por la pierna izquierda del M5B y el PIE y otro de 2 g.d.l. formado por la pierna derecha. En tal caso, es posible usar como vector de variables generalizadas el siguiente:  $\boldsymbol{\rho} = [q_1 \ \beta_1 \ \phi \ \theta \ q_2 \ \beta_2]^T \in \mathbb{R}^6$ . A continuación se muestra la obtención de los elementos de la ecuación (4) y la reducción del sistema bajo estudio a la ecuación (7).

La energía cinética total del sistema se puede descomponer en:

$$K(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \sum_{i=1}^4 K_i(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) + K_p(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) \quad (18)$$

donde  $K_i$  es la energía cinética asociada al eslabón  $i$  del M5B y  $K_p$  es la energía cinética asociada al péndulo;  $K_i$  y  $K_p$  se pueden obtener mediante (Sciavicco y Siciliano, 2000)

$$K_i = \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{p}}_i^T \dot{\mathbf{p}}_i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T I_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (19)$$

$$K_p = \frac{1}{2} m_p \dot{\mathbf{p}}_p^T \dot{\mathbf{p}}_p + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_p^T I_p \boldsymbol{\omega}_p \quad (20)$$

donde  $\dot{\mathbf{p}}_i$  y  $\boldsymbol{\omega}_i$  representan la velocidad lineal y la velocidad angular del del centro de masa del eslabón  $i$ , respectivamente, y donde  $\dot{\mathbf{p}}_p$  y  $\boldsymbol{\omega}_p$  representan la velocidad lineal y

la velocidad angular del centro de masa del péndulo, respectivamente; considerándose todos los vectores referidos al marco  $\Sigma_0$ .

Los vectores de posición a los centros de masa de cada eslabón para el M5B son los siguientes

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} l_{c1} C(q_1) \\ l_{c1} S(q_1) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} l_{c4} C(q_2) \\ l_{c4} S(q_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} LC(q_1) + l_{c1} C(q_1 + \beta_1) \\ LS(q_1) + l_{c1} S(q_1 + \beta_1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 2L + LC(q_2) + l_{c3} C(q_2 + \beta_2) \\ LS(q_2) + l_{c3} S(q_2 + \beta_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

el vector de posición al centro de masa del péndulo esta descrito por la siguiente ecuación

$$\mathbf{p}_p = {}^0\mathbf{p}_b + {}^0R^b \mathbf{p}_p$$

donde  ${}^0\mathbf{p}_b$  es el vector de posición de la base del PIE con respecto al marco  $\Sigma_0$ ,  ${}^b\mathbf{p}_p$  es el vector de posición del centro de masa del péndulo con respecto  $\Sigma_b$  y  ${}^0R^b$  es la matriz de rotación de  $\Sigma_b$  respecto a  $\Sigma_0$ , que son

$${}^0\mathbf{p} = L \begin{bmatrix} C(q_1) + C(q_1 + \beta_1) \\ S(q_1) + S(q_1 + \beta_1) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^b\mathbf{p}_p = l_{cp} \begin{bmatrix} S(\theta) \\ -C(\theta)S(\phi) \\ C(\theta)C(\phi) \end{bmatrix}$$

$${}^0R^b = \begin{bmatrix} C(q_1 + \beta_1) & -S(q_1 + \beta_1) & 0 \\ S(q_1 + \beta_1) & C(q_1 + \beta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Debido a que el mecanismo de cinco barras se encuentra en el plano es fácil comprobar que las velocidades angulares para cada eslabón se definen como

$$\boldsymbol{\omega}_1 = [0 \ 0 \ \dot{q}_1]^T \quad \boldsymbol{\omega}_2 = [0 \ 0 \ \dot{q}_1 + \dot{\beta}_1]^T$$

$$\boldsymbol{\omega}_4 = [0 \ 0 \ \dot{q}_2]^T \quad \boldsymbol{\omega}_3 = [0 \ 0 \ \dot{q}_2 + \dot{\beta}_2]^T$$

la velocidad angular del péndulo con respecto a  $\Sigma_0$  esta dada por (Campa y de la Torre, 2009)

$$\boldsymbol{\omega}_p = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S(\mathbf{r}_1) & S(\mathbf{r}_2) & S(\mathbf{r}_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_2 \\ \dot{\mathbf{r}}_3 \end{bmatrix}$$

donde  $S(\cdot)$  es la matriz antisimétrica que para un vector  $\mathbf{v} = [v_1 \ v_2 \ v_3]^T$  se define como

$$S(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}$$

y los vectores  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{r}_3$  son las columnas de la matriz de rotación del marco  $\Sigma_p$  con respecto a  $\Sigma_0$  cuyos elementos son:

$$\begin{aligned} r_{11} &= C(q_1 + \beta_1)C(\theta) - S(q_1 + \beta_1)S(\phi)S(\theta) \\ r_{12} &= -S(q_1 + \beta_1)C(\phi) \\ r_{13} &= C(q_1 + \beta_1)S(\theta) + S(q_1 + \beta_1)S(\phi)C(\theta) \\ r_{21} &= S(q_1 + \beta_1)C(\theta) + C(q_1 + \beta_1)S(\phi)S(\theta) \\ r_{22} &= C(q_1 + \beta_1)C(\phi) \\ r_{23} &= S(q_1 + \beta_1)S(\theta) - C(q_1 + \beta_1)S(\phi)C(\theta) \\ r_{31} &= -C(\phi)S(\theta) \\ r_{32} &= S(\phi) \\ r_{33} &= C(\phi)C(\theta) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\boldsymbol{\omega}_p = \begin{bmatrix} C(q_1 + \beta_1)\dot{\phi} - S(q_1 + \beta_1)C(\phi)\dot{\theta} \\ S(q_1 + \beta_1)\dot{\phi} + C(q_1 + \beta_1)C(\phi)\dot{\theta} \\ \dot{q}_1 + \dot{\beta}_1 + S(\phi)\dot{\theta} \end{bmatrix}.$$

Además, en la ecuación (19) hay que usar las masas de cada eslabón del M5B así como la matriz de momentos de inercia con respecto a un marco coordenado que pasa por el centro de masa. Por simplicidad se supondrá que esa matriz es diagonal para los eslabones del M5B y está dada por

$${}^0I_p = {}^0R \begin{bmatrix} I_{px} & 0 & 0 \\ 0 & I_{py} & 0 \\ 0 & 0 & I_{pz} \end{bmatrix}$$

para el PIE.

Ahora es posible usar un paquete de computo simbólico como Mathematica o Matlab para obtener las matrices del modelo dinámico (4). Para obtener la matriz  $M(\boldsymbol{\rho})$  se calcula la energía cinética total  $K(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  y se usa (5) obteniéndose

$$M(\boldsymbol{\rho}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & 0 & 0 \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & 0 & 0 \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} & m_{34} & 0 & 0 \\ m_{14} & m_{24} & m_{43} & m_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} & m_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} & m_{66} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} m_{11} &= I_1 + I_2 + I_{px} + L^2 m_2 + 2L^2 m_p + l_{c1}^2 m_1 + l_{c2}^2 m_2 \\ &+ l_{cp}^2 m_p - I_{px} C(\phi)^2 C(\theta)^2 + I_{pz} C(\phi)^2 C(\theta)^2 \\ &+ 2L^2 m_p c(\beta_1) - l_{cp}^2 C(\phi)^2 C(\theta)^2 + 2Ll_{c2} m_2 C(\beta_1) \\ &+ 4Ll_{cp} m_p C(\beta_1/2)^2 S(\theta) + 2Ll_{cp} m_p S(\beta_1) C(\theta) S(\phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{12} &= I_2 + I_{px} + L^2 m_p + l_{c2}^2 m_2 + l_{cp}^2 m_p + L^2 m_p C(\beta_1) \\ &+ I_{pz} C(\phi)^2 C(\theta)^2 - I_{px} C(\phi)^2 C(\theta)^2 - l_{cp}^2 C(\phi)^2 C(\theta)^2 \\ &+ Ll_{c2} m_2 C(\beta_1) + 2Ll_{cp} m_p S(\theta) + Ll_{cp} m_p C(\beta_1) S(\theta) \\ &+ Ll_{cp} m_p S(\beta_1) C(\theta) S(\phi) \\ m_{13} &= -C(\phi)C(\theta)Ll_{cp} m_p [1 + C(\beta_1)] \\ &- C(\phi)C(\theta) (I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p) S(\theta) \\ m_{14} &= l_{cp}^2 m_p S(\phi) + 2Ll_{cp} m_p S(\phi)S(\theta)C(\beta_1/2)^2 \\ &+ I_{px} S(\phi) + Ll_{cp} m_p S(\beta_1)C(\theta) \\ m_{22} &= I_2 + I_{px} + L^2 m_p + l_{c2}^2 m_2 + l_{cp}^2 m_p \\ &- (I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p) C(\phi)^2 C(\theta)^2 + 2Ll_{cp} m_p S(\theta) \\ m_{23} &= -C(\phi)C(\theta) [S(\theta) (I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p) + Ll_{cp} m_p] \\ m_{24} &= S(\phi) [I_{px} + l_{cp}^2 m_p + Ll_{cp} m_p S(\theta)] \\ m_{33} &= I_{pz} + (I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p) C(\theta)^2 \\ m_{44} &= I_{pz} + l_{cp}^2 m_p \\ m_{55} &= m_4 l_{c4}^2 + m_3 [L^2 + l_{c3}^2 + 2Ll_{c3} C(\beta_2)] + I_4 + I_3 \\ m_{56} &= m_3 [l_{c3}^2 + Ll_{c3} C(\beta_2)] + I_3 \\ m_{66} &= m_3 l_{c3}^2 + I_3 \end{aligned}$$

Con la matriz  $M(\boldsymbol{\rho})$  es posible calcular la matriz  $C(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  a través de los coeficientes de Christoffel  $c_{ijk}(\boldsymbol{\rho})$  definidos como:

$$c_{ijk}(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial M_{kj}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_i} + \frac{\partial M_{ki}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_j} - \frac{\partial M_{ij}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_k} \right], \quad (21)$$

donde  $M_{ij}(\boldsymbol{\rho})$  denota el  $ij$ -ésimo elemento de la matriz de inercia  $M(\boldsymbol{\rho})$ . En efecto, el  $kj$ -ésimo elemento  $C_{kj}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  de la matriz  $C(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}})$  puede obtenerse de la siguiente manera:

$$C_{kj}(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = [c_{1jk}(\boldsymbol{\rho}) \ c_{2jk}(\boldsymbol{\rho}) \ \cdots \ c_{njk}(\boldsymbol{\rho})] \dot{\boldsymbol{\rho}} \quad (22)$$

por lo tanto

$$C(\boldsymbol{\rho}, \dot{\boldsymbol{\rho}}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{56} & c_{66} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_1 \dot{\beta}_1 + a_2 \dot{\phi} + a_3 \dot{\theta} \\ c_{12} &= a_1 (\dot{q}_1 + \dot{\beta}_1) + a_2 \dot{\phi} + a_3 \dot{\theta} \\ c_{13} &= a_2 (\dot{q}_1 + \dot{\beta}_1) + a_4 \dot{\phi} + a_5 \dot{\theta} \\ c_{14} &= a_3 (\dot{q}_1 + \dot{\beta}_1) + a_5 \dot{\phi} + a_6 \dot{\theta} \\ c_{21} &= -a_1 \dot{q}_1 + a_7 \dot{\phi} + a_8 \dot{\theta} \\ c_{22} &= a_7 \dot{\phi} + a_8 \dot{\theta} \\ c_{23} &= a_7 (\dot{q}_1 + \dot{\beta}_1) + a_9 \dot{\phi} + a_{10} \dot{\theta} \\ c_{24} &= a_8 (\dot{q}_1 + \dot{\beta}_1) + a_{10} \dot{\phi} + a_{11} \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{31} &= -a_2 \dot{q}_1 - a_7 \dot{\beta}_1 + a_{12} \dot{\theta} \\
c_{32} &= -a_7 (\dot{q}_1 + \dot{\beta}_1) + a_{12} \dot{\theta} \\
c_{33} &= a_{13} \dot{\theta} \\
c_{34} &= a_{12} (\dot{q}_1 + \dot{\beta}_1) + a_{13} \dot{\phi} = -c_{42} \\
c_{41} &= -a_3 \dot{q}_1 - a_8 \dot{\beta}_1 - a_{12} \dot{\phi} \\
c_{42} &= -a_8 (\dot{q}_1 + \dot{\beta}_1) - a_{12} \dot{\phi} \\
c_{44} &= 0
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
a_1 &= Ll_{cp}m_p C(\beta_1)C(\theta)S(\phi) \\
&\quad - LS(\beta_1)(l_{c2}m_2 + Lm_p + l_{cp}m_p S(\theta)) \\
a_2 &= C(\phi)C(\theta)Ll_{cp}m_p S(\beta_1) \\
&\quad + C(\phi)C(\theta)(I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p)C(\theta)S(\phi) \\
a_3 &= -Ll_{cp}m_p S(\beta_1)S(\theta)S(\phi) + C(\theta)Ll_{cp}m_p(1 + C(\beta_1)) \\
&\quad + C(\theta)(I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p)C(\phi)^2 S(\theta) \\
a_4 &= C(\theta)S(\phi)Ll_{cp}m_p(1 + C(\beta_1)) \\
&\quad + C(\theta)S(\phi)(I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p)S(\theta) \\
a_5 &= \frac{1}{2}C(\phi) [I_{px} + l_{cp}^2 m_p - (I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p)C(2\theta)] \\
&\quad + 2C(\phi)Ll_{cp}m_p C(\beta_1/2)^2 S(\theta) \\
a_6 &= Ll_{cp}m_p [2C(\beta_1/2)^2 C(\theta)S(\phi) - S(\beta_1)S(\theta)] \\
a_7 &= (I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p)C(\phi)S(\phi)C(\theta)^2 \\
a_8 &= C(\theta) [Ll_{cp}m_p + (I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p)C(\phi)^2 S(\theta)] \\
a_9 &= C(\theta)S(\phi) [Ll_{cp}m_p + (I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p)S(\theta)] \\
a_{10} &= \frac{1}{2}C(\phi) [I_{px} + l_{cp}^2 m_p - (I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p)C(2\theta)] \\
&\quad + C(\phi)Ll_{cp}m_p C(\beta_1/2)^2 S(\theta) \\
a_{11} &= Ll_{cp}m_p C(\theta)S(\phi) \\
a_{12} &= -\frac{1}{2}C(\phi) [I_{px} + l_{cp}^2 m_p + (I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p)C(2\theta)] \\
a_{13} &= -(I_{px} - I_{pz} + l_{cp}^2 m_p)C(\theta)S(\theta)
\end{aligned}$$

Finalmente, para el vector de fuerzas gravitacionales se obtiene primero la energía potencial total la cual sólo depende de la energía potencial del PIE, es decir

$$U(\rho) = -m\mathbf{p}_p^T \mathbf{g}$$

donde  $\mathbf{g}$  es un vector que indica la dirección de la aceleración de gravedad con respecto a  $\Sigma_0$  y luego se usa la propiedad (6)

$$\mathbf{g}(\rho) = \frac{\partial U(\rho)}{\partial \rho} = mgl_{cp} \frac{\partial (C(\theta)C(\phi))}{\partial \rho}$$

por lo tanto

$$\mathbf{g}(\rho) = -mgl_{cp} \begin{bmatrix} 0 & 0 & S(\phi)C(\theta) & C(\phi)S(\theta) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Las restricciones de este sistema están dadas por

$$\gamma(\rho) = \begin{bmatrix} L[C(q_1) + C(q_1 + \beta_1) - 2 - C(q_2) - C(q_2 + \beta_2)] \\ L[S(q_1) + S(q_1 + \beta_1) - S(q_2) - S(q_2 + \beta_2)] \end{bmatrix}$$

y la matriz  $R(\rho)$  se define como

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ J_{\beta_{11}} & 0 & 0 & J_{\beta_{12}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ J_{\beta_{21}} & 0 & 0 & J_{\beta_{22}} \end{bmatrix}$$

El modelo reducido del sistema (4) no se muestra aquí por razones de espacio, pero se muestra lo necesario para su obtención.

#### IV. CONCLUSIONES

En este documento se presenta como obtener el modelo cinemático y dinámico de un sistema tipo péndulo invertido esférico montado sobre un mecanismo de cinco barras. El modelo se obtiene en términos de un conjunto no mínimo de coordenadas generalizadas pero luego se puede reducir usando un método propuesto en la literatura. El modelo obtenido ya sin restricciones es novedoso y puede ser usado para simulación y control.

#### V. AGRADECIMIENTOS

Trabajo financiado parcialmente por PROMEP, DGEST y CONACYT (proyecto 60230)..

#### REFERENCIAS

- Albouy, X. y L. Praly (2000). On the use of dynamic invariants and forwarding for swinging up a spherical inverted pendulum. En: *Proc. of the 39th Conference on Decision and Control*. Sydney, Australia.
- Alvarado, O. (2010). Construcción, Modelado y Control de un Mecanismo Tipo Péndulo Invertido Esférico. Tesis de maestría. Instituto Tecnológico de la Laguna.
- Bloch, A., N. Leonard y J. Marsden (2000). Controlled lagrangians and the stabilization of mechanical systems i: the first matching theorem. *IEEE Transactions on Automation Control* **45**, 2253–2269.
- Campa, R. y H de la Torre (2009). Pose control of robot manipulators using different using different orientation representations: A comparative review. En: *Proc. of the American Control Conference*. St. Louis, MO, USA.
- Dabney, J. B. y F. H. Ghorbel (2002). Modeling closed kinematic chains via singular perturbations. En: *Proc. of the IEEE American Control Conference*. Anchorage, AK, USA.
- Ghorbel, F. H., O. Chételat, R. Gunawardana y R. Longchamp (2000). Modeling and set point control of closed-chain mechanisms: Theory and experiment. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **8**, 801–815.
- Ishii, C., Y. Nishitani y H. Hashimoto (2009). Modelling and robust stabilization of a closed-link 2-dof inverted pendulum with gain scheduled control. *International Journal of Modelling, Identification and Control* **6**, 320–332.
- Liu, G., D. Netic y I. Mareels (2005). Modelling and stabilisation of a spherical inverted pendulum. En: *Proc. of the 16th IFAC World Congress*. Prague, Czech Republic.
- Merlet, J. P. (2006). *Parallel Robots*. Springer-Verlag. London.
- Quanser (2010). Control challenges: Rotary (2 dof ip). *Página web: www.quanser.com/english/html/challenges/fs\_chall\_rotary\_flash.htm*.
- Sciavicco, L. y B. Siciliano (2000). *Modelling and Control of Robot Manipulators*. Springer Verlag.
- Soto, I. y R. Campa (2011). Sobre modelado dinámico de robots paralelos: Mecanismo de cinco barras como caso de estudio. En: *memorias del Congreso Mexicano de Robótica*. Matehuala, SLP.
- Yang, R., Y. Kuen y Z. Li (2000). Stabilization of a 2-dof spherical pendulum on x-y table. En: *Proc. of the 2000 IEEE International conference on Control Application*. Anchorage, Alaska, USA.